

**RÁCZ JÁNOS MATEMATIKA EMLÉKVERSENY**  
**2008/2009**  
**11-12. ÉVFOLYAM**  
**I. forduló (2008. szept.15 – dec.15.)**

1. Határozzuk meg a maradékokat, ha a következő számokat 9-cel osztjuk!  
 $65^{6n} ; 65^{6n+1} ; 65^{6n+2} ; 65^{6n+3}$
2. Határozzuk meg a következő számsorozat egymást követő  $n$  tagjának összegét!  
 $1; 11; 111; 1111; \dots$
3. Az  $A, B, C$  pontok rajta vannak az  $y = \frac{1}{x}$  egyenletű hiperbolán. Bizonyítsuk be, hogy az  $ABC$  háromszög magasságpontja is ezen a hiperbolán van!
4. Egy egyenessel vágjunk ketté egy háromszöget két egyenlő területű részre úgy, hogy az egyenesnek a háromszögön belüli szakasza a lehető legrövidebb legyen!
5. Bizonyítsuk be, hogy  $n > 1$  egész szám esetén  $\sqrt[3]{n - \sqrt{n}} + \sqrt[3]{n + \sqrt{n}}$  irracionális szám!
6. Határozzuk meg azt a legnagyobb  $p$  egész számot, amelyre igaz, hogy az  $1; 2; \dots; 99; 100$  számok bármelyik permutációjában van 10 egymást követő elem, amelyek összege legalább  $p$ !
7. Legyen  $p_n$  az  $n$ -edik prímszám, és  $N = p_n + p_{n+1}$ , ( $n > 1$ ). Bizonyítsuk be, hogy  $N$  legalább 3, nem feltétlenül különböző prímszám szorzata!
8. A körbe írt négyszög  $\overline{AC}$  átlójának a felezőpontja a  $\overline{BD}$  átlón van. Bizonyítsuk be, hogy  $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = 2\overline{BD}^2$ !
9. Határozzuk meg azt a valós együtthatós  $P(x)$  polinomot, amely eleget tesz a következő két feltételnek:
  - a.  $xP(x) = (x-3)P(x+1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
  - b.  $P(4) = -12$
10. Aladár, Béla, Cecil ebben a sorrendben egymás után dobnak szabályos dobókockával. Aki 6-ost dob, kilép. Mi a valószínűsége, hogy
  - a. Aladár, Béla, Cecil
  - b. Cecil, Béla, Aladár sorrendben lépnek ki?