

### 7–8. osztály, V. forduló

**13.** Négy ember közül mindegyik 1917. után, különböző években született. 1973-ban életkoruk számjegyeinek összege egyenlő volt. Születési évszámaik összege négyzetszám. Hány éves a legfiatalabb?

**14.** Készíts  $4 \times 4$ -es bűvös négyzetet prímszámokból!

**15.** Egy íjászversenyen mind az öt résztvevő két-két nyíllal lőtt ugyanabba a céltáblába. Egy-egy találatra 1-től 10-ig bármilyen pontszámot kaphattak. Mind a 10 lövés talált, de azonos értékű körbe két nyílvessző nem fűródött. A találatok így oszlottak meg: két találatával Anna 11, Bea 4, Cili 7, Dóra 16, Emma 17 pontot szerzett. Ki, hányas értékű körbe talált?

### 9–10. osztály, V. forduló

**13.** Bizonyítsuk be, hogy ha az  $e_1; e_2; \dots; e_n$  számok mindegyike  $+1$  vagy  $-1$ , és  $e_1e_2 + e_2e_3 + \dots + e_n e_1 = 0$ , akkor  $n$  osztható 4-gyel.

**14.** Szerkesszünk háromszöget, ha adottak a köré írható kör középpontjának az oldalegyenesekre vonatkozó tükörképei.

**15.** Gizi és Tibi a következő játékot játsszák. Gizi kijelöl egy  $X$  pontot az  $ABC$  háromszög  $AB$  oldalán, majd Tibi választ egy  $Y$  pontot a  $BC$  oldalon. Végül Gizi keres egy  $Z$  pontot az  $AC$ -n. Gizi arra törekszik, hogy az  $XYZ$  háromszög területe a lehető legnagyobb, Tibi pedig arra, hogy a lehető legkisebb legyen. Mekkora lesz az  $XYZ$  háromszög területe, ha mindketten jól játszanak?

### 11–12. osztály, V. forduló

**13.** Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget!

$$\operatorname{tg}^2(x) + \operatorname{ctg}^2(x) \geq \sqrt{8}(\operatorname{tg}(x) - \operatorname{ctg}(x))$$

**14.** Tekintsük az  $y = x^2 + px + q$  egyenletű parabolák olyan halmazát, amelyek a koordinátatengelyeket három különböző pontban metszik. Bizonyítandó, hogy minden ilyen ponthármas által meghatározott körvonal áthalad egy közös ponton.

**15.** Jelölje  $x$  illetve  $y$  egy derékszögű háromszögben a befogókhoz tartozó súlyvonalak hosszát, legyen  $z$  a háromszög átfogója. Határozzuk meg az  $\frac{x+y}{z}$  kifejezés maximumát!

Legjobb megoldók:

7-8			9-10			11-12		
Marussy Kristóf	8.a	64	Böszörményi Bence	9.a	29	Guszejnov Dávid	12.c	59
Stark Ádám	8.a	46	Kórádi Zoltán	10.b	25	Darvas Dániel	12.c	10
Ádám Anna Kinga	8.a	38,5	Grosz Patricia	9.a	14			

**Beadási határidő:** 2008. FEBRUÁR 10.

### 13–14 years, 5th round

**13.** Four people were born after 1917 in different years, whose sum is a perfect square. In 1973 the sum of the digits of their age were equal for all four of them. How old is the youngest this year?

**14.** Arrange a  $4 \times 4$  magic square of prime numbers.

**15.** At an archery competition each contestant shot two arrows at the same target. For every shot they received a score between 1 and 10 but no two were equal. The results were: Anna 11, Bea 4, Cili 7, Dóra 16, Emma 17 points after the two rounds. Give the details of the scores.

### 15–16 years, 5th round

**13.** Show that if each of  $e_1; e_2; \dots; e_n$  is either  $+1$  or  $-1$  and  $e_1e_2 + e_2e_3 + \dots + e_n e_1 = 0$ , then 4 divides  $n$ .

**14.** Construct a triangle if the three mirror images of the circumcenter through the three sides are given.

**15.** Gizi and Tibi play the following game on a triangle  $ABC$ . Gizi specifies a point  $X$  on the side  $AB$ , then Tibi chooses a point  $Y$  on side  $BC$ . Finally Gizi picks a point  $Z$  on  $AC$ . Gizi's aim is to make the area of the triangle  $XYZ$  as large as possible, Tibi wants to keep it as small as possible. What will be the area if they both play well?

### 17–18 years, 5th round

**13.** Solve the following inequality:

$$\tan^2(x) + \operatorname{ctn}^2(x) \geq \sqrt{8}(\tan(x) - \operatorname{ctn}(x)).$$

**14.** Consider every possible three points on the coordinate axes such that there exists a parabola through them with equation of the form  $y = x^2 + px + q$ . Show that the circumcircle of each of these three points goes through a common point.

**15.** Denote by  $x$  and  $y$  the lengths of the medians corresponding to the catheti of a right triangle. Let  $z$  denote the length of the hypotenuse. Determine the maximum of the expression  $\frac{x+y}{z}$ .