7–8. osztály, VI. forduló

16. Egy háromszög oldalainak mérőszámai egész számok. A háromszög kerületének hossza 100 cm. A centiméterekben kifejezett oldalhosszak szorzata 28080. Határozd meg a háromszög oldalait! Keresd meg az összes megoldást!

17. Az ABC háromszögben $\alpha = 40°$ és $\beta = 60°$. Jelölje M a háromszög magasságpontját! Továbbá az AM és BM szakaszok szimmetriatengelyei K illetve L pontokban metsszék az AB oldalt! Számítsd ki a KLM háromszög belső szögeinek nagyságát!

18. Egy testet hat nyolcszög, nyolc hatszög és tizenkét négyzet határol. A test minden csúcsából három él indul ki. Hány csúcsa van a testnek?

9–10. osztály, VI. forduló

16. Mutassuk meg, hogy egy 10×10-es táblázat mezői kitölthetők a $-1;\ 0;\ 1$ számokkal úgy, hogy a 20 darab sor- és oszlopösszeg között ne legyenek egyenlők.

17. Egy derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága m, beírható körének sugara pedig r. Mutassuk meg, hogy $0,4 < \frac{r}{m} < 0,5$.

18. Mennyi azoknak a nyolcjegyű számoknak az összege, amelyek csak az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ számjegyekből állnak és mindegyiküket legalább egyszer tartalmazzák?

11–12. osztály, VI. forduló

16. Milyen m és n pozitív egész számokra igaz, hogy

$$\sum_{k=0}^{n-1}(m+k) = 1000?$$

17. Közelítő értékek használata nélkül bizonyítandó, hogy

$$\sin 10° \cdot \sin 20° \cdot \sin 30° \cdot \sin 40° \cdot \sin 50° \cdot \sin 60° \cdot \sin 70° \cdot \sin 80° = \frac{3}{256}.$$

18. Az O középpontú AB átmérőjű félkör M pontjában húzott érintő az A és B pontokhoz tartozó érintőket A_1 , ill. B_1 pontokban metszi. M merőleges vetülete az AB átmérőn P. Legyen $x = AP : PB > 0$. Forgassuk meg az AA_1B_1B trapézt, ill. az A_1OB_1 háromszöget AB körül, és jelöljük az így nyert forgástestek térfogatát V_1, ill. V_2-vel. Legyen $f(x) = V_2 : V_1$. Határozzuk meg az $f(x)$ függvényt, és annak maximumát.

Legjobb megoldók:

7-8			9-10			11-12		
Marussy Kristóf	8.a	78	Böszörményi Bence	9.a	29	Guszejnov Dávid	12.c	66
Stark Ádám	8.a	59	Kóródi Zoltán	10.b	25			
Szkupien Bence	7.a	47	Grosz Patricia	9.a	14			

Beadási határidő: 2008. MÁRCIUS 10.

13–14 years, 6th round

16. There is a triangle with integer sides in centimetetres. Its circumference is 100 cm. The product of the lengths is 28080. Determine the sides of the triangle. (Find all solutions!)

17. In the triangle ABC we have $\alpha = 40°$ and $\beta = 60°$. Let M stand for the orthocenter. Now the axes of symmetry of the segments AM and BM intersect the side AB in K and L respectively. Compute the angles of the triangle KLM.

18. A polyhedral body is bordered by six octogons, eight hexagons and twelve squares. Three edges meet at every vertex of the polyhedron. How many vertices are there?

15–16 years, 6th round

16. Justify that the entries of a 10×10 array can be filled with the numbers -1; 0; 1 such that the 20 row and column sums are all distinct.

17. The smallest height of a right triangle is m, its inradius is r. Show that $0,4 < \frac{r}{m} < 0,5$.

18. What is the sum of all eight digit numbers contaning exclusively the digits $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, each at least once?

17–18 years, 6th round

16. For which positive integers m and n do we have

$$\sum_{k=0}^{n-1}(m+k) = 1000?$$

17. Without recourse to approximations show that

$$\sin 10° \cdot \sin 20° \cdot \sin 30° \cdot \sin 40° \cdot \sin 50° \cdot \sin 60° \cdot \sin 70° \cdot \sin 80° = \frac{3}{256}.$$

18. A half circle AB is given with center O. A tangent at its point M intersects the tangents at A and B in A_1 and B_1 respectively. Let P be the perpendicular projection of M on AB and denote by x the nonzero ratio $AP : PB$. If we rotate the AA_1B_1B trapezoid and the A_1OB_1 triangle around AB we get two bodies of volume V_1 and V_2 respectively. Put $f(x) = V_2 : V_1$. Determine the function $f(x)$and its maximum.