

Rácz János matematika emlékverseny
2008/2009
11-12. évfolyam II. forduló
(Beadási határidő: 2009. március 20.)

1. Egy derékszögű koordináta-rendszerben úgy helyeztünk el végtelen sok téglalapot, hogy mindegyiknek egyik oldala az x , egy másik oldala az y tengelyre illeszkedik. A téglalapok origóval szemközti csúcsának koordinátái egész számok. Mutassuk meg, hogy van a téglalapok között két olyan, amelyek közül az egyik tartalmazza a másikat!
2. Adottak a 2, 3, 4, ..., 2008, 2009 számok és a belőlük képzett összes különböző tényezőkből álló két, három, ..., 2008 tényező szorzat (összesen $2^{2008}-1$ szám). Mutassuk meg, hogy ezen számok reciprokainak összege egész szám!

3. Oldjuk meg az

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{6z} = \frac{1}{\frac{x+y+z}{2+3+6}},$$
$$x + y^2 + z^3 = 14$$

egyenletrendszert a pozitív valós számok halmazán!

4. Egy szabályos négyoldalú gúla beírt gömbjének sugara r , köréírható gömbjének sugara R . Igazoljuk, hogy

$$\frac{R}{r} \geq \sqrt{2} + 1$$

5. Jelölje $M(a)$ az egész számegyenesen értelmezett $f_a(x) = \left| a + \cos 2x + \frac{1}{2 + \cos^2 x} \right|$ (a tetszőleges valós szám) függvény maximumát. Határozzuk meg az $M(a)$ számok minimumát!

6. Jelölje egy trapéz két párhuzamos oldalának hosszát a és c , szárainak hosszát b és d , átlóinak hosszát e és f ($a > c$, $d > b$, $f > e$). Igazoljuk, hogy

$$d^2 - b^2 = (a - c) \frac{f^2 - e^2}{a + c}$$

7. Bizonyítsuk be, hogy ha $x_1 > x_2 > \dots > x_n > 0$ valós számok ($n > 1$), akkor

$$\frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1^4 + x_2^4} + \frac{x_2^3 - x_3^3}{x_2^4 + x_3^4} + \dots + \frac{x_{n-1}^3 - x_n^3}{x_{n-1}^4 + x_n^4} < \frac{3}{2} \cdot \frac{x_1 - x_n}{x_1 x_n}$$

8. Igazoljuk, hogy ha $P(x)$ egy legalább elsőfokú egész együtthatós polinom és x_1, x_2, \dots, x_n ($n \geq 3$) különböző egész számok, akkor a következő egyenlőségek nem lehetnek egyszerre igazak:

$$P(x_1) = x_2, \quad P(x_2) = x_3, \quad \dots, \quad P(x_n) = x_1$$

9. Melyik n természetes szám esetén van a $(2 + x^2)^n + \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)^n = 18$ egyenletnek legtöbb valós gyöke? (Csak a különböző gyököket számoljuk.)

10. Bizonyítsuk be, hogy hat egymás után következő pozitív egész szám szorzata nem lehet egy pozitív egész szám ötödik hatványával egyenlő!