Rácz János matematika emlékverseny
2008/2009
9-10. évfolyam II. forduló
(Beadási határidő: 2009. március 20.)

1. Egy háromszög oldalai *a; b; c*, területe *t* és tudjuk, hogy $(a+b+c)(a+b-c)=4t$. Bizonyítsd be, hogy a háromszög derékszögű!

2. Oldd meg a pozitív egész számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$xyz+xz+yz-xy-x-y+z=1986$$

3. Egy *ABCD* húrnégyszög *AB* és *CD* oldalegyenese az *E* pontban, *AD* és *BC* oldalegyenese az *F* pontban metszi egymást. Az *AED* szög felezője az *AD* oldalt a *P* a *BC* oldalt a *Q* pontban az *AFB* szög felezője a *DC* oldalt az *R*, az *AB* oldalt az *S* pontban metszi. Igazold, hogy a *PQRS* négyszög rombusz!

4. Kis számológépünk elromlott és most azon kívül, hogy kiszámolja a számok reciprokát, csak összeadni és kivonni tud. Keressünk olyan képleteket, amelyek alapján kiszámolható a számok négyzete és a két szám szorzata.

5. Oldd meg a következő egyenlőtlenséget!

$$(x^2+3x)(x^2+3x+2)\geq\frac{9}{16}$$

6. Az *ABCD* trapéz párhuzamos oldalai *AB* és *CD*, átlóinak metszéspontja *M*. A *CMD* szög szögfelezőjére tükrözzük a *C* és *D* csúcsokat. A tükörképek legyenek C_1 és D_1.Bizonyítsd be, hogy A, B, C_1 és D_1 egy körön vannak!

7. Az *M* és *N* pontok az *AB* és *CD* szakaszok felezőpontjai. Bizonyítsd be, hogy a *BCD* háromszög súlypontja, az *MN* szakasz felezőpontja és az *A* pont egy egyenesen vannak!

8. Határozd meg az *n* természetes szám értékét úgy, hogy az $n^2+5n+14$ négyzetszám legyen!

9. Hat ember hányféleképpen állhat sorba, úgy hogy két nagy között nem lehet egy kisebb?

10. Tekintsünk egy 2×30-as „sakktáblát”. Hányféleképpen fedhető le ez a „sakktábla” 1×2-es dominóval?