1. feladat

A második helyezett a 7 mérkőzésen legfeljebb 6 pontot szerzett, mert 6,5 ponttal egy döntetlenje és 6 győzelme lenne, és akkor holtversenyben lenne az elsővel.
Másrészt az utolsó négy helyezett egymás között 6 mérkőzést játszott, tehát összesen legalább 6 pontot szereztek, ezért a második helyezettnek is legalább 6 pontja van. Vagyis a második pontosan 6 pontot szerzett és akkor ennyit szerzett összesen az utolsó négy is, tehát csak egymás ellen szereztek pontot. Ebből következik, hogy a mezőny első felétől mindegyikük vereséget szenvedett, azaz a harmadik helyezett legyőzte a hatodikat.

2. feladat

Legyen a háromszög egyik hegyesszöge α, átfogója 1, így befogói $\cos\alpha$ és $\sin\alpha$.
Helyezzük el a háromszöget egy derékszögű koordinátarendszerben úgy, hogy a csúcspontjai $A(\cos\alpha;0)$, $B(0;\sin\alpha)$ és $C(0;0)$. Jelöljük a beírt kör sugarát r-rel. A hegyesszögű csúcsoktól a beírt körhöz húzott érintőszakaszok összege egyenlő az átfogóval, ezért

$$(\sin\alpha - r) + (\cos\alpha - r) = 1,$$

ebből

$$r = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha - 1}{2}.$$

A beírt kör középpontja $K(r;r)$, egyenlete

$$x^2 + y^2 - 2r(x+y) + r^2 = 0.$$

A súlypont $S\left(\frac{\cos\alpha}{3};\frac{\sin\alpha}{3}\right)$, ezt behelyettesítve a kör egyenletébe az r-re kapott érték figyelembevételével

$$\frac{\cos^2\alpha}{9} + \frac{\sin^2\alpha}{9} - (\sin\alpha + \cos\alpha - 1)\cdot\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{3} + \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)^2}{4} = 0.$$

Jelöljük $(\sin\alpha + \cos\alpha)$-t z-vel, így rendezés után

$$3z^2 + 6z - 13 = 0.$$

Ennek az egyenletnek a pozitív gyöke

$$z = \sin\alpha + \cos\alpha = \frac{4\sqrt{3}}{3} - 1.$$

A fenti összefüggésből négyzetre emelés és rendezés után

$$\sin 2\alpha = \frac{16 - 8\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}7145.$$

A háromszög hegyesszögei 22,8° és 67,2°.

3. feladat

Hozzuk közös nevezőre a kifejezést.

$$\frac{x^n(y-z)+y^n(z-x)+z^n(x-y)}{(x-y)(x-z)(y-z)}$$

Ha $n=0$ vagy $n=1$, akkor a számláló nulla. Ha $n\geq 2$, akkor a számláló

$$x^n y - x^n z + z^n x - z^n y + y^n(z-x) = (x^n - z^n)(y-z) + z^n x - z^{n+1} + y^n(z-x) =$$
$$= (x^n - z^n)(y-z) - (x-z)(z^n - y^n) =$$
$$= (x-z)(y-z)\left[\left(x^{n-1} + x^{n-2}z + \ldots + xz^{n-2} + z^{n-1}\right) - \left(y^{n-1} + y^{n-2}z + \ldots + yz^{n-2} + z^{n-1}\right)\right] =$$
$$= (x-z)(y-z)\left[(x^{n-1} - y^{n-1}) + z(x^{n-2} - y^{n-2}) + \ldots + z^{n-2}(x-y)\right]$$

A harmadik tényező minden tagja osztható $(x-y)$-nal, tehát a közös nevezőre hozott tört egyszerűsíthető $(x-z)(y-z)(x-y)$-nal, a megmaradó kifejezés x, y, z-nek egész együtthatós polinomja, aminek értéke egész szám, ha x, y és z egész számok.